EXERCICE N1

1) a) $D_f = IR$,donc si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$; $f(-x) = |-x-2| - |-x+2| = |x+2| - |x-2| = -f(x)$ donc f est impaire .

2) c) $M \in \Gamma \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \perp (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 0$

$\Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \Gamma$ est la médiatrice de [AB] .

3) a) Soient a et b deux réel de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ tels que $a < b$ alors $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Rightarrow -\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$ et $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

par suite $\sqrt{a} - \frac{1}{a} < \sqrt{b} - \frac{1}{b} \Leftrightarrow g(a) < g(b)$ donc g est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

4) b) $h(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$; $h(0) = 0 \leq h(x)\ \forall x \in D_h$ donc 0 est le minimum de h sur D_h .

EXERCICE N2

A) 1) $f(x) = \dfrac{1-5x}{2x^2+x+1}$. $D_f = \{ x \in IR$ tels que : $2x^2 + x + 1 \neq 0 \}$

on pose : $2x^2 + x + 1 = 0$; $\Delta = 1 - 8 = -7 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 > 0\ \forall x \in IR$ donc $D_f = IR$.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x}{2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5}{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-5x}{2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-5}{2x} = 0$

Interprétation : (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation : $y = 0$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

3) $f(x) + 1 = \dfrac{1-5x}{2x^2+x+1} + 1 = \dfrac{1-5x+2x^2+x+1}{2x^2+x+1} = \dfrac{2x^2-4x+2}{2x^2+x+1} = \dfrac{2(x^2-2x+1)}{2x^2+x+1} = \dfrac{2(x-1)^2}{2x^2+x+1} \geq 0$.

$\Leftrightarrow -1 \leq f(x) \Leftrightarrow f(1) \leq f(x)\ \forall x \in D_f \Leftrightarrow 1$ est le minimum de f sur D_f .

4) a) $7f(x) - 25 = \dfrac{7-35x}{2x^2+x+1} - 25 = \dfrac{7-35x-50x^2-25x-25}{2x^2+x+1} = \dfrac{-50x^2-60x-18}{2x^2+x+1}$

$= \dfrac{-2(25x^2+30x+9)}{2x^2+x+1} = \dfrac{-2(5x+3)^2}{2x^2+x+1} \leq 0 \Leftrightarrow 7f(x) - 25 \leq 0\ \forall x \in D_f$.

b) $7f(x) - 25 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{25}{7} \Leftrightarrow f(x) \leq f(-\frac{3}{5})\ \forall x \in D_f \Leftrightarrow \frac{25}{7}$ est le maximum de f sur D_f .

B) 1) a) $f(x) = 1$, $(C_f) \cap (\Delta : y = 1) = \{A(-3, 1) ; B(0, 1)\} \Rightarrow S_{IR} = \{-3, 0\}$

b) $-1 < f(x) \leq 1$, les solutions sont les abscisses des points de (C_f) situés strictement au dessus de la droite d'équation : $y = -1$ et au dessous de la droite d'équation : $y = 1$ donc $S_{IR} =]-\infty ; -3] \cup [0 ; +\infty[\setminus \{1\}$.

2) * $x \mapsto \dfrac{ax+b+2}{x+4}$ est définie sur $IR \setminus \{-4\}$ en particulier sur $]-\infty\,;-3[\setminus\{-4\}$.

* f est définie sur IR en particulier sur $[-3\,;1[$.

* $x \mapsto 2\sqrt{x^2+3}+ax+b$ est définie sur IR en particulier sur $]1\,;+\infty[$

Conclusion : $D_g = IR \setminus \{-4\,,1\}$

3) $\lim\limits_{x\to -3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{ax+b+2}{x+4} = -3a+b+2$; $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 1$

g admet une limite en $-3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} g(x) \Leftrightarrow -3a+b+2 = 1$ **(1)**

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2\sqrt{x^2+3}+ax+b = 4+a+b$

g admet une limite en $1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) \Leftrightarrow 4+a+b = -1$ **(2)**

(2) - (1) $\Rightarrow 4a+2 = -2 \Leftrightarrow 4a = -4 \Leftrightarrow$ $\mathbf{a = -1}$, **(1)** $\Rightarrow 3+b+2 = 1 \Leftrightarrow \mathbf{b = -4}$

C) Pour la suite on prend : $a = -1$ et $b = -4$.

1) $\lim\limits_{x\to -4^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -4^+} \left(-\dfrac{x+2}{x+4}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to -4^+} (x+4) = 0^+$.

$\lim\limits_{x\to -4^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -4^-} \left(-\dfrac{x+2}{x+4}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to -4^-} (x+4) = 0^-$.

Interprétaion : (C g) admet une asymptote verticale d'équation : $x = p$.

2) a) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)-(x-4) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2\sqrt{x^2+3}-x-4-(x-4) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2\sqrt{x^2+3}-2x = \lim\limits_{x\to +\infty} 2(\sqrt{x^2+3}-x)$

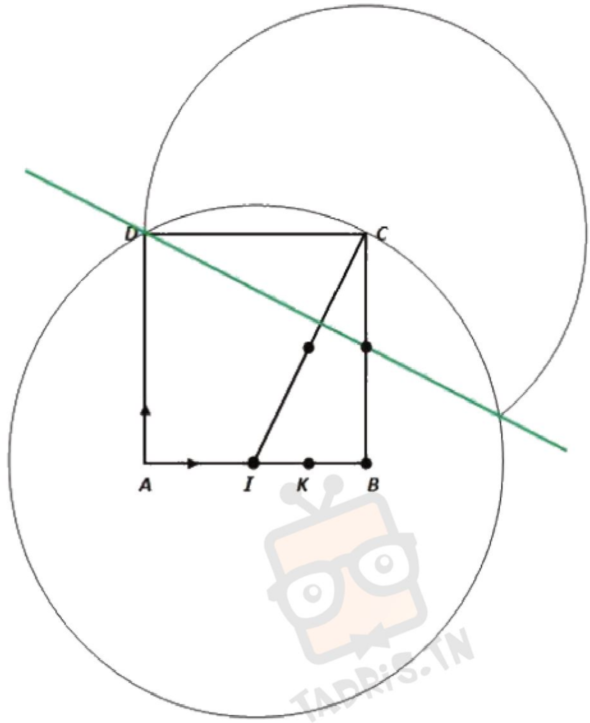
$$= \lim_{x\to +\infty} 2\left(\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{6}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0$$

Par suite **(C g)** admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique $\Delta : y = x-4$.

b) Pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, $g(x) - y = \dfrac{6}{\sqrt{x^2+3}+x} > 0$ donc (C g) est au dessus de Δ sur $]1\,;+\infty[$.

EXERCICE N3

A). 1)



2) * $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BK}$ [$J = I * C$ et $K = I * B \Rightarrow (JK)$ ∥ (BC) or $(BC) \perp (IB)$ donc K est le projeté $\perp$ de J sur (IB)]

$= BI \cdot BK = 2$

* $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BH}$ [$J = I * C$ et $H = B * C \Rightarrow (JH)$ ∥ (IB) or $(IB) \perp (BC)$ donc H est le projeté $\perp$ de J sur (BC)]

$= BC \cdot BH = 4 \cdot 2 = 8$

A).

* $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}).(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BJ} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}$

$= 8 - BC^2 - 2 + BI \cdot BA = 8 - 16 - 2 + 8 = -2$

B) Soit $\Delta = \{ M \in P$ tels que : $2MC^2 - MA^2 - MB^2 = -16 \}$.

1) a) I est le milieu du [AB] d'après la formule de la médiane

Pour tout $M \in P$, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 2MI^2 + 8$.

b) $2MC^2 - MA^2 - MB^2 = 2MC^2 - (MA^2 + MB^2)$

$= 2MC^2 - (2MI^2 + 8) = 2(MC^2 - MI^2) - 8$

$= 2(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MI}).(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MI}) - 8$

$= 2\overrightarrow{IC}(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JI}) - 8 = 4\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{JM} - 8$.

2) a) $2DC^2 - DA^2 - DB^2 = 4\,\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{JD} - 8 = -8 - 8 = -16 \Leftrightarrow D \in \Delta$

b) $M \in \Delta \Leftrightarrow 2MC^2 - MA^2 - MB^2 = -16 \Leftrightarrow 4\,\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{JM} - 8 = -16$

$\Leftrightarrow 4\,\overrightarrow{CI}.(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DM}) = -8 \Leftrightarrow \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{DM} = -2 \Leftrightarrow -2 + \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{DM} = -2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{DM} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CI} \perp \overrightarrow{DM} \Leftrightarrow \Delta$ est la droite passante par D et perpendiculaire à (IC).

3) a) Construction du point E.

b) $2EC^2 - EA^2 - EB^2 = 2DC^2 - (EA^2 + EB^2) = 32 - (2EI^2 + 8) = 32 - (2DI^2 + 8) = 32 - 2(DA^2 + AI^2) - 8$

$= 24 - 2(16 + 4) = -16 \Leftrightarrow E \in \Delta$

C) 1) Le point $C(4,4)$ dans le repère R donc $(\mathscr{C}) : (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$.

2) $I(2,0)$, $(IC) \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IC}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à Δ donc $\Delta : x + 2y + c = 0$ or $D(0,4) \in \Delta$

alors $8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$ d'où $\Delta : x + 2y - 8 = 0$.

3) $E(x,y) \in \Delta \cap (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 & \textbf{(1)} \\ x + 2y - 8 = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow x = 8 - 2y$, on change x dans **(1)** $(4-2y)^2 + (y-4)^2 = 16 \Leftrightarrow 5y^2 - 24y + 16 = 0$

$\Delta = 24^2 - 20.16 = 256 = 16^2$ donc $y = 4$ ou $y = \frac{4}{5}$.

$y = 4 \Rightarrow x = 0$ donnent le point $D(0,4)$ et $y = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{32}{5}$ donnent le point $\mathbf{E}\left(\frac{32}{5}, \frac{4}{5}\right)$